

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Методы оптимизации
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	3
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 30 час.

Всего часов: 90, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 05.02.2024

## Аннотация

Курс посвящён теоретическим и прикладным аспектам решения задач выпуклой оптимизации. Такие задачи возникают в многочисленных приложениях, часть из которых рассматривается на занятиях. Курс состоит из двух частей. В первой части курса изучаются основные понятия выпуклого анализа, условия оптимальности и даётся введение в теорию двойственности. Основными объектами изучения являются выпуклые множества, выпуклые функции и конусы. Вторая часть курса посвящена численным методам решения задач выпуклой оптимизации как безусловных, так и условных. Проводится анализ эффективности рассматриваемых алгоритмов с точки зрения получения теоретических оценок сходимости и скорости решения конкретных классов задач выпуклой оптимизации. Также демонстрируется использование аппарата выпуклой оптимизации для вычисления приближённых решений задач дискретной оптимизации.

### 1. Цели и задачи

#### Цель дисциплины

- освоение теоретических и численных методов решения задач конечномерной оптимизации: теории необходимых и достаточных условий локального экстремума гладкой функции по множеству и некоторых численных методов поиска локальных экстремумов в задачах безусловной и условной оптимизации.

#### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, концепций и методов) в области МО;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области МО;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических ис-следований в области МО.

### 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия, теоремы, численные алгоритмы методов оптимизации (МО);
- современные проблемы соответствующих разделов МО;
- понятия, теоремы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла МО;
- основные численные алгоритмы МО с обоснованием их сходимости;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач (МО).

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач МО;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач МО, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области МО в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач МО (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов МО;
- предметным языком МО и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

#### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

##### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Выпуклые множества, теорема об отделимости	4	4		4
2	Задача линейного программирования	4	4		4
3	Задача математического программирования	4	4		4
4	Конус убывания функции и касательный конус к множеству	6	6		6
5	Критерий локального острого экстремума	4	4		4
6	Многогранный конус и его сопряженный	4	4		4
7	Необходимое условие локального условного экстремума	4	4		4
Итого часов		30	30		30
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		90 час., 2 зач.ед.			

##### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

###### 1. Выпуклые множества, теорема об отделимости

Градиентный метод. Проекция точки на множество. Отделимость точки и множества. Отделимость выпуклых множеств.

## 2. Задача линейного программирования

Постановка задач. Методы решения задач. Решение задач линейного программирования графическим методом. Задачи оптимального распределения ресурсов. Поиск равновесий Нэша.

## 3. Задача математического программирования

Барьерные функции. Выпуклые множества. Нелинейное программирование: основные понятия и классификация задач; методы решения нелинейных задач оптимизации. Динамическое программирование: принцип оптимальности Беллмана; решение задач с использованием динамического программирования. Целочисленное программирование. Многокритериальное программирование.

## 4. Конус убывания функции и касательный конус к множеству

Дифференцируемость. Конус убывания функции: связь между градиентом функции и конусом убывания; свойства и примеры конусов убывания; применение конусов убывания в задачах оптимизации. Касательный конус к множеству: геометрическая интерпретация касательного конуса; свойства касательного конуса; применение касательного конуса в задачах ограниченной оптимизации. Связь между конусами убывания функции и касательными конусами.

## 5. Критерий локального острого экстремума

Скорость сходимости. Минимизирующие последовательности. Доказательство критерия: доказательство критерия острого локального экстремума для функций одной переменной с использованием производных; интерпретация условий критерия на графике функции. Обобщение на функции нескольких переменных: расширение критерия на случай функций нескольких переменных; формулировка и доказательство критерия острого локального экстремума для функций нескольких переменных.

## 6. Многогранный конус и его сопряжённый

Метод Лагранжа. Модифицированные функции Лагранжа. Представление многогранного конуса в виде линейных неравенств. Связь между многогранным конусом и его сопряжённым. Геометрическая интерпретация сопряжённого конуса. Двойственность: понятие двойственности в линейном программировании; связь между прямой и двойственной задачами линейного программирования через многогранные конусы; применение сопряжённого конуса при решении задач линейного программирования. Анализ свойств и применение в многомерных задачах оптимизации.

## 7. Необходимое условие локального условного экстремума

Унимодальные функции. Одномерная минимизация. Условные экстремумы: понятие условного экстремума функции многих переменных; формулировка задачи поиска локальных условных экстремумов. Метод множителей Лагранжа. Необходимое условие экстремума: формулировка необходимого условия локального условного экстремума в терминах градиентов функций и ограничений; доказательство необходимого условия с помощью метода множителей Лагранжа. Интерпретация результатов.

## 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Стандартная учебная аудитория.

## 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Методы оптимизации [Текст]. Ч. 2 : Численные алгоритмы : учеб. пособие для вузов / Жадан, В. Г. ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2015 .— 320 с.
2. Численные методы оптимизации [Текст] : [учеб.пособие для вузов] / А.Ф.Измайлов, М.В.Солодов .— М. : Физматлит, 2003, 2005 .— 304 с.
3. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

#### Дополнительная литература

1. Комбинаторика и информация [Текст]. Ч. 2, Информационные модели / В. К. Леонтьев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) - М.МФТИ,2016
2. Линейная алгебра [Текст], учебник для вузов /В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. -М., Физматлит, 2006, 2007

#### **7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)**

<http://dm.fizteh.ru>

#### **8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

На лекционных занятиях используются мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций.

В процессе самостоятельной работы обучающихся возможно использование таких программных средств, как Mathcad, MATLAB, Maple и др.

#### **9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

1. Рекомендуется успешно сдавать контрольные работы, так как это упрощает итоговую аттестацию по предмету.
2. Для подготовки к итоговой аттестации по предмету лучше всего пользоваться материалами лекций.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Проектирование и разработка комплексных бизнес-приложений Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	<u>3</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 5 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** Д.В. Мусатов, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-2 Способен использовать современные информационные технологии и программные средства при решении задач профессиональной деятельности, соблюдая требования информационной безопасности	ОПК-2.1 Способен применять современные вычислительную технику и сервисы сети Интернет в области (сфере) профессиональной деятельности
	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
	ОПК-2.3 Знает основные требования информационной безопасности

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Методы оптимизации» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия, теоремы, численные алгоритмы методов оптимизации (МО);
- современные проблемы соответствующих разделов МО;
- понятия, теоремы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла МО;
- основные численные алгоритмы МО с обоснованием их сходимости;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач (МО).

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач МО;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить алгоритмы решения задач МО, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области МО в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач МО (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов МО;
- предметным языком МО и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

Примеры домашних заданий:

1. Численно сравните скорость сходимости градиентного спуска для квадратичной целевой функции с положительно определённой матрицей с теоретической оценкой
2. Приведите пример задачи выпуклой оптимизации, для которой нарушается условие Слейтера
3. Получите выражение для величины шага в наискорейшем градиентом спуске для выпуклой квадратичной целевой функции.

Примеры заданий для контрольной работы:

1. Что такое выпуклая функция?
2. Напишите условия Каруша-Куна-Таккера для задачи выпуклой оптимизации
3. Что такое зазор двойственный?

4. Что такое сильная двойственность?
5. Какая скорость сходимости градиентного спуска для сильно выпуклой функции?
6. Какова сложность одной итерации в методе BFGS?
7. Что такое проксимальный градиентный метод и для каких задач его целесообразно использовать?

#### **4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся**

1. Необходимые и достаточные условия второго порядка в задаче условной оптимизации
2. Квазиньютоновские методы. Метод Давидона-Флетчера-Пауэлла.
3. Квазиньютоновские методы. Метод Бroyдена-Флетчера-Голдфарба-Шэнно.
4. Квазиньютоновские методы. Метод Бroyдена.
5. Квазиньютоновские методы. Метод SR1.
6. Методы нулевого порядка для задач безусловной оптимизации.
7. Методы возможных направлений для задач условной оптимизации.
8. Метод нагруженных функций.
9. Метод потенциалов решения транспортной задачи.
10. Метод Франка-Вульфа решения задач выпуклого программирования.
11. Метод Нелдера-Мида.

#### **Критерии оценивания**

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;



- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения дифференцируемого зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины.